# Ein Widerspruch im zweiten Diagonalargument von Cantor

**(Fassung Juli 2010)**

Cantor will mit seinem Diagonalargument die Existenz überabzählbarer Mengen zeigen. Als ein Beispiel dient ihm die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Der von uns zu zeigende Widerspruch beruht darauf, dass die von Cantor zugrunde gelegte Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 als Dezimalzahlen der Gestalt $0{,}a_1a_2...$ bereits das Transfinite impliziert. Mit diesen Dezimalzahlen argumentiert Cantor so, als könnten sie alle wie Dezimalzahlen mit endlich vielen Stellen als etwas aktual Unendliches vollständig angeschrieben werden. Dem ist aber nicht so. Selbst unter der Annahme, es sei möglich, von jeder ausreichend definierten reellen Zahl zwischen 0 und 1 jede beliebige Dezimalstelle zu errechnen, berücksichtigt Cantors Argument nicht, dass in jeder endlichen Zeitspanne - und mehr hat man nicht zur Verfügung - nur potentiell Unendliches mit endlich vielen Dezimalstellen tatsächlich errechnet werden kann. Der gedankliche Schritt von der Möglichkeit unendlicher Dezimalzahlen zu unendlichen Dezimalzahlen zu gelangen, deren Dezimalstellen tatsächlich alle bereits zur Verfügung stehen, führt zu dem von uns zu zeigenden Widerspruch.

**Um diesen Widerspruch herzuleiten werden wir eine vollständige Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 angeben, die so gewählt ist, dass von reellen Zahlen außerhalb von ihr per definitionem nicht gesprochen werden kann.**

1. Wir beginnen mit der Definition einer Mitteilung M vom Umfang n.
   - 1.1. Unter einer Mitteilung M vom Umfang n verstehen wir einen quadratischen Raster bestehend aus $n^2$ Elementarquadraten der Seitenlänge 1/100 mm, die jeweils entweder weiß oder schwarz sind. Ein solcher Raster kann etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht wurden.
   - 1.2. Alle möglichen derartigen Mitteilungen M können abzählbar angeordnet werden.
     - 1.2.1. Wir ordnen die Mitteilungen M zunächst in Gruppen nach ihren Umfang n. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus $n^2$ Elementarquadraten, die in n Zeilen angeordnet sind. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder schwarz.
     - 1.2.2. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu.
     - 1.2.3. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit $EQ_{jk}$ und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit $a_{jk}$.
     - 1.2.4. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl
       $$a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}...a_{jk}...a_{nn}$$
       eindeutig dargestellt.
     - 1.2.5. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.
2. Eine Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnleer". M ist zunächst nichts anderes als eine physikalische Gegebenheit, etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor. Eine Seite Mayaschrift oder eine Seite chinesischer Schriftzeichen ist z.B. für den Autor ohne "Sinn", da er diese Sprachen bzw. diese Schriften nicht kennt.
   - 2.1. **Erst durch einen Leser, also durch eine Person P, welche eine Mitteilung M liest, kann M einen "Sinn" gewinnen und zwar für diese Person P.** Dieser Sinn ist offenbar ein Objekt des Denkens der Person P. Wir können ihn daher als Denkobjekt DO(M,P) be-

zeichnen. Ob überhaupt und wenn ja welchen Sinn M für den Autor oder für den Leser dieser Studie hat, ist gegenstandslos.

2.2. Wir sprechen im folgenden vom Sinn einer Mitteilung M für eine Person P gemäß 2.1. unabhängig davon, ob P die Mitteilung M tatsächlich liest. DO(M,P) bezeichnet also jenen Sinn, den M für P für den Fall hat, dass P die Mitteilung M tatsächlich liest.

2.3. Wir wollen nun Ordnung in die Menge aller möglichen Denkobjekte bringen.

2.3.1. Dabei beginnen wir mit der Anordnung aller möglichen Personen PT in irgend einem Zeitpunkt T..

2.3.1.1. Jede mögliche Person PT wird während jedes möglichen Lesevorganges ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnehmen. Um Ordnung in alle möglichen Lesevorgänge zu bringen wählen wir im Raum ein Koordinatensystem und zerlegen den Raum in Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm. Diese Elementarwürfel können wir in einer Anordnung AO(EW) abzählbar anordnen.

2.3.1.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jedem Volumen, das jede mögliche Person PT einnimmt, mindestens ein solcher Elementarwürfel EW = EW(PT) liegt, der PT eindeutig kennzeichnet.

2.3.1.3. Alle möglichen Personen PT ordnen wir nun mit Hilfe der sie eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW(PT) und deren Anordnung AO(EW) in einer Anordnung AO(PT) abzählbar an.

2.3.2. Wir setzen fort mit der Anordnung aller in beliebigen Zeitpunkten möglichen Lesevorgänge LP aller überhaupt möglichen Personen P.

2.3.2.1. Dazu wählen wir einen Nullpunkt auf der Zeitgeraden und teilen diese in Elementar-Zeitabschnitte EZ der Länge 0.01 sek. ein. Alle Elementar-Zeitabschnitte EZ können wir in einer Anordnung AO(EZ) abzählbar anordnen.

2.3.2.2. Den Zeitabschnitt eines Lesevorganges LP einer Person P auf der Zeitgeraden bezeichnen wir mit LPZ

2.3.2.3. Die Dauer D(LPZ) jedes möglichen Lesevorganges LPZ irgend einer Mitteilung M durch irgend eine Person P ist jedenfalls so lang, dass mindestens ein Elementar-Zeitabschnitt EZ zur Gänze in den Zeitraum des Lesevorganges LPZ fällt. Dieser Elementar-Zeitabschnitt EZ = EZ(LPZ) kennzeichnet den Lesevorgang LPZ daher eindeutig.

2.3.2.4. Es sei T = T(EZ) der jeweilige Beginn eines Elementar-Zeitabschnitts EZ. Dann kennzeichnet T = T[EZ(LP)] den möglichen Lesevorgang LP eindeutig.

2.3.2.5. Alle möglichen Lesevorgänge LPZ ordnen wir nun mit Hilfe der sie eindeutig kennzeichnenden Zeitpunkte T sowie der sie in T eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW(PT) in einer Anordnung AO(LP) abzählbar an.

2.3.3. Wir sind davon ausgegangen, dass eine Mitteilung M für sich allein genommen "sinnleer" ist und erst für einen Leser P einen Sinn gewinnen kann. Diesen Sinn haben wir als Objekt des Denkens von P mit DO(M,P) bezeichnet. Der Sinn einer Mitteilung M für eine Person P kann aber auch vom Zeitpunkt T, in dem die Person P die Mitteilung M liest, abhängen. Der Sinn der Mitteilung "Heute" wird für den Autor im allgemeinen vom Tag abhängen, an dem er diese Mitteilung liest. Ein anderes Beispiel: Die Mitteilung "i" kann den Buchstaben i ebenso bedeuten wie etwa $\sqrt{-1}$ , je nachdem in welchem Zusammenhang die Mitteilung gelesen wird. Wir wollen einer solchen Abhängigkeit durch die Bezeichnung DO(M,P,T) Rechnung tragen. DO(M,P,T) besagt also, dass M für P im Zeitpunkt T den Sinn DO(M,P,T) hat und zwar unabhängig davon, ob P die Mitteilung M wahrheitsgemäß oder (absichtlich oder irrtümlich) unrichtig interpretiert. Es gibt kein Kriterium über die "Wahrheit" einer Aussage von P. Wir stellen lediglich fest, dass, falls P seine Aussage über den Sinn von M im Zeitpunkt T gemacht hat, diese Tatsache unveränderlich feststeht, was immer P etwa in einem späteren Zeitpunkt hinsichtlich des Sinns der Mitteilung M angibt.

2.3.4. Wir betrachten abschließend noch einmal alle möglichen Personen P, alle möglichen Mitteilungen M und alle möglichen Lesevorgänge LP. Aus ihnen gewinnen wir alle möglichen Denkobjekte $DO(M,P,T) = DO\left\{M,T\left[\left(EZ(LP)\right)\right]\right\}$. Diese Denkobjekte bezeichnen gemäß 2.3.3. jeweils jenen Sinn, der Mitteilung M für die Person P gemäß 2.2. im Zeitpunkt T.

2.3.5. Aus der abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen M gemäß 1.2.5 und der abzählbaren Anordnung AO(LP) aller möglichen Lesevorgänge LP gemäß 2.3.2.5 gewinnen wir nun unschwer eine abzählbare Anordnung AO(M,LP) aller möglichen Denkobjekte aller möglichen Personen P.

3. Bei den reellen Zahlen zwischen 0 und 1 handelt es sich offenbar um Denkobjekte. Die mit Hilfe des zweiten Cantorschen Arguments hergeleitete Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 steht daher im Widerspruch zur abzählbaren Anordnung AO(M,LP) aller möglichen Denkobjekte gemäß 2.3.5. Wir wollen im folgenden zeigen, worauf dieser Widerspruch zurückzuführen ist.

3.1. Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist die von Cantor verwendete Diagonalzahl die wir hier folgendermaßen darstellen wollen:

Es sei $AO(RZ) = \left\{a_1, a_2, ... a_n, ...\right\}$ eine beliebige Anordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1, von der behauptet wird, sie enthalte alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Man stellt nun jede Zahl $a_n$ in Form einer Dezimalzahl $0,a_{n1},a_{n2}...a_{nn}...$ dar und stellt sie in Form des folgenden Rasters zusammen:

$$
\begin{array}{l}
a_1 = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}...\\
a_2 = 0,a_{21}a_{22}...a_{2n}...\\
.\quad\quad .\quad\quad .\\
.\quad\quad .\quad\quad .\\
a_n = 0,a_{n1}a_{n2}...a_{nn}...\\
.\quad\quad .\quad\quad .\\
.\quad\quad .\quad\quad .
\end{array}
$$

3.1.1. Auf Grund dieses Rasters bildet man eine Dezimalzahl $b = 0,b_1b_2...b_n...$ mit $b_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$ und $b_n = 2$ für $a_{nn} = 1$.

3.1.2. Die reelle Zahl b liegt zwischen 0 und 1 und unterscheidet sich an der $n^{ten}$ Dezimalstelle $b_n$ von $a_{nn}$, der jeweiligen $n^{ten}$ Dezimalstelle von $a_n$. Es gilt also $\forall n: b_n \neq a_{nn}$ und daraus folgt $\forall n: b \neq a_n$. Da die $a_{nn}$ auf der Diagonale des Rasters nach 3.1. liegen, nennt man b auch "Diagonalzahl". Wegen $\forall n: b \neq a_n$ ist die Diagonalzahl b in der Anordnung AO(RZ) nicht enthalten woraus die Unvollständigkeit dieser Anordnung folgt.

3.2. Wir wollen nun die Eigenschaften des Rasters aus 3.1. näher untersuchen.

3.2.1. Die Schlussfolgerung aus 3.1.2., wonach die Anordnung der Zahlen $a_n$ die Diagonalzahl nicht enthält, ist trivial, solange der Raster 3.1. endlich viele Zahlen $a_n$ enthält. Wir werden aber im folgenden zeigen, dass eine Erweiterung dieser Schlussfolgerung auf einen Raster mit unendlich vielen Zahlen $a_n$ unzulässig ist und auf einen Widerspruch führt.

3.2.2. Die Wahl der Dezimalstellen $a_{jk}$ jeweils in der $j^{ten}$ Zeile an $k^{ter}$ Stelle des Rasters nach 3.1. haben wir in keiner Weise eingeschränkt. Daraus folgt unter anderem, dass zwei verschiedene $a_n$ trotz unterschiedlicher Dezimalzahl-Darstellung die selbe Zahl darstellen können. So gilt z.B. 0,199..... = 0,200.... usw. (Das Beispiel 1 = 0,999... kann ausgeschlossen werden, da vorausgesetzt wurde alle $a_n$ liegen **zwischen** 0 und 1). Der Raster aus 3.1. hat aber eine viel grundlegendere Schwäche. Er impliziert bereits unerlaubterweise transfinite Elemente. Erst auf Grund dieser transfiniten Elemente, deren mögliche Existenz ja gerade erst bewiesen werden soll, führt die Cantorsche Anordnung zu einem scheinbaren Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

3.2.3. Als Beispiel eines solchen transfiniten Elementes im Raster 3.1. wählen wir die Zahl 1/π, offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. So wie auch andere transzendente Zahlen kann sie nie in endlicher Zeit zur Gänze als Dezimalzahl angeschrieben werden, obwohl die Berechnung jeder einzelnen ihrer Dezimalstellen in endlicher Zeit grundsätzlich möglich ist. Ein Raster nach 1.3. muss daher stets - in welchem Zeitpunkt auch immer - unvollständig sein.

3.2.4. **Wir wollen im folgenden eine Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorstellen, die keine derartige transfinite Schwäche aufweist**. Wir werden weiter zeigen, dass jeder Versuch, eine Unvollständigkeit dieser Anordnung zu zeigen, misslingt. Dies zeigen wir insbesondere Am Beispiel des zweiten Cantorschen Diagonalarguments.

3.2.4.1. Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Mitteilungen M aus 1. Eine abzählbare Anordnung aller möglichen Mittelungen M in Form von AO(M) haben wir in 1.2.5. gegeben.

3.2.4.2. Im Hinblick auf unser Ziel, eine vollständige Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 anzugeben, wollen wir alle jene Mitteilungen M herausfiltern, die eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 **eindeutig und widerspruchsfrei** beschreiben.

3.2.4.3. Wie in 2. dargelegt sind aber Mitteilungen M für sich allein genommen sinnleer. Sie können, wie in 2.1. erläutert, erst im Zusammenhang mit einem möglichen Leser P einen Sinn erhalten, Für ein mögliches Lesen im Zeitpunkt T haben wir diesen Sinn in 2.3.3. als Denkobjekt DO(M,P,T) bezeichnet.

3.2.4.4. Wir führen daher die folgende "Individual-Anordnung" AO[M,P,T,RZ(01)] ein. Sie besteht aus der Anordnung aller jener Denkobjekte DO [M,P,T,RZ(01)] aus der Menge der Denkobjekte DO(M,P,T), die eine reelle Zahl RZ(01) zwischen 0 und 1 darstellen. Dabei handelt es sich also um alle Mitteilungen M von denen irgend eine Person P in irgend einem Zeitpunkt T gemäß 2.2. bejaht, dass M eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Die Bezeichnung "Individual-Anordnung" soll darauf hinweisen, dass die Frage der Aufnahme eines Denkobjektes in diese Anordnung von der persönlichen Meinungsäußerung eines Individuums P abhängt.

3.2.4.5. Wir behaupten nun, Die Individual-Anordnung aus 3.2.4.4. enthält als Denkobjekte alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Dies ist eine universelle Aussage. Sie besagt nämlich, dass nicht nur für den Autor alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch eine Mittelung M nach 1.1. eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden können, sondern dass dies auch für alle möglichen Personen gilt. Da die Denkobjekte aus 3.2.4.4. abzählbar sind, steht diese Behauptung in Widerspruch zu Cantor, der die Unvollständigkeit jeder abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 postuliert und diese Unvollständigkeit mit Hilfe seines zweiten Diagonalarguments beweisen will. Wir zeigen im folgenden, dass dieser Beweis misslingen muss.

3.2.4.6. Jeder Kritiker der Vollständigkeit der Individual-Anordnung muss eine mögliche Person P aus 2.3.1. sein. Wir nennen ihn PK. Er muss in irgend einem Zeitpunkt T = TK die Unvollständigkeit der Individual-Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 aus 3.2.4.4. behaupten. Wir werden zeigen, dass Cantors zweites Diagonalargument nicht geeignet ist, eine solche Behauptung zu beweisen.

3.2.4.6.1. Dazu bilden wir zunächst eine Mitteilung MK, welche die Individual-Anordnung aus 3.2.4.4. sowie eine auf Grund dieser Anordnung mit Hilfe des zweiten Cantorschen Diagonalarguments gebildete Diagonalzahl enthält. **Eine solche Mitteilung kann unschwer etwa aus den Formulierungen dieser Studie gebildet werden**. Will PK ein so formuliertes zweites Cantorsches Diagonalargument zum Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung aus 3.2.4.4. verwenden, muss er in irgend einem Zeitpunkt TK bejahen, dass MK für ihn eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt.

3.2.4.6.2. Das kritische Denkobjekt DOK = DO[MK,PK,TK,RZ(0,1)] stellt also in TK nach Aussage von PK selbst eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar und ist somit gemäß 3.2.4.4. in der Individualanordnung enthalten. Das Problem für PK liegt darin, dass er einerseits irgend einmal bejahen muss, DOK stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar, denn durch sie soll ja gerade die Unvollständigkeit der Individual-Anordnung gezeigt werden, und andererseits gerade dadurch das Denkobjekt DOK gemäß 3.2.4.4. in die Individual-Anordnung einbringt. Damit ist der eingangs behauptete Widerspruch in Cantors zweitem Diagonalargument für die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 herbeigeführt. qed.